

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Алгебраическая геометрия. Часть 1
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 09.03.2023

## Аннотация

Данный курс включает в себе изучение основных положений и методов алгебраической геометрии. Первая часть курса (осенний семестр) представляет собой по существу введение в коммутативную алгебру. В осеннем семестре происходит изучение следующих разделов коммутативной алгебры: коммутативные кольца, топология Зарисского на спектре кольца, модули, аддитивные функторы, кольца частных, целая зависимость, примарное разложение, нетеровы кольца и модули.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение алгебраической геометрии.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области алгебраической геометрии.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Абстрактные алгебраические многообразия над замкнутым полем	3	3		20
2	Геометрические схемы; делимость и собственность	3	3		20
3	Многообразия Сегре, Веронезе и Грассмана: проективные вложения и задание квадратичными уравнениями	3	3		15
4	Пространство проективных гиперповерхностей	3	3		10
5	Размерность алгебраического многообразия	3	3		10
Итого часов		15	15		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Абстрактные алгебраические многообразия над замкнутым полем

Сложность «самых сложных функций» от  $n$  аргументов.

###### 2. Геометрические схемы; делимость и собственность

Формула разложения булевой функции по нескольким переменным.

3. Многообразия Сегре, Веронезе и Грассмана: проективные вложения и задание квадратичными уравнениями

Решение дискретной задачи как вычисление набора булевых функций.

4. Пространство проективных гиперповерхностей

Теорема о рекуррентном неравенстве.

5. Размерность алгебраического многообразия

Вычисление определителя и обращение матриц в классе NC.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютерами, доской и маркерами.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид , -М., Мир, 1991

Фонд кафедры

2. Основы алгебраической геометрии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. Р. Шафаревич .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 589 с. : ил. — (Классические направления в математике). - Список лит. к истор. очерку: с. 580-582. - Предм. указ.: с. 583-588. - 2000 экз. - ISBN 978-5-94057-085-1 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

Фонд кафедры

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 544 с. +pdf. версия. - Библиогр.: с. 528. - Предм. указ.: с. 529-543. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0378-6 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия. Часть 1» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Форма контроля: первый семестр -- экзамен, второй семестр -- дифференцированный зачет. В течение курса студенты решают и сдают листочки с задачами. Образцы задач приведены ниже.

1. Пусть кольцо  $A$  таково, что любой его элемент  $x$  удовлетворяет уравнению  $x^n = x$  для некоторого  $n > 1$ , зависящего от  $x$ . Покажите, что любой простой идеал в  $A$  максимален.

2. Пусть  $A$  - коммутативное кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:

1). Пространство  $\text{Spec } A$  несвязно.

2).  $A \cong A_1 \times A_2$ , где  $A_1, A_2 \neq 0$ .

3).  $A$  содержит идемпотентный элемент  $e \neq 0, 1$ .

3. Пусть  $K \subset L$  - расширение полей,  $\alpha, \beta \in L$  - алгебраические элементы. Тогда элементы  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\alpha\beta$ ,  $\alpha/\beta$  тоже алгебраические.

4. Пусть  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  - точная последовательность  $A$ -модулей. Если  $M'$  и  $M''$  конечно порождены, то и  $M$  конечно порожден. Верно ли обратное?

5. Пусть  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  - кольцо вычетов по модулю  $n > 1$ . Каждому делителю  $d$  числа  $n$  соответствует точная последовательность

$\mathbb{Z}_n$

$0 \rightarrow d\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow d\mathbb{Z}_n \rightarrow 0$ ,

$\mathbb{Z}_n$

где  $d' = n/d$ . Покажите, что эта последовательность расщепляется (или, что то же,  $d'\mathbb{Z}_n$  - проективный  $\mathbb{Z}_n$ -модуль) тогда и только тогда, когда числа  $d$  и  $d'$  взаимно просты. Приведите пример проективного модуля, не являющегося свободным.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

- 1) Индекс пересечения и теорема Безу для плоских проективных кривых.
- 2) Особенности плоских проективных кривых. Двойственная кривая. Соотношения Плюккера для кривых с простейшими особенностями.
- 3) Описание линейной оболочки данного тензора. Квадратичные уравнения, задающие образ вложений Плюккера, Сегре и Веронезе.
- 4) Пересечение клеток дополнительной размерности на грассманиане. Формулы Пьерри.
- 5) Свойства целых и нормальных расширений колец. Конечно порождённая алгебра над полем является полем только если она целая.
- 6) Теоремы Гильберта о базисе и о нулях полиномиального идеала. Конечно порождённая алгебра над полем нётерова.
- 7) Антиэквивалентность категории аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем  $K$  и категории конечно порождённых приведённых  $K$ -алгебр. Прямое произведение многообразий.
- 8) Топология Зариского на спектре кольца. Разложение на неприводимые компоненты.
- 9) Свойства конечных морфизмов: замкнутость, собственные замкнутые подмножества переходят в собственные, конечная сюръекция на нормальное многообразие открыта.
- 10) Собственность проективных многообразий. Существование конечной эпиморфной проекции проективного (соотв. аффинного) многообразия на проективное (соотв. аффинное) пространство.
- 11) Теоремы о размерности пересечения и о размерностях слоёв морфизма. Неприводимость многообразия, расслоенного над неприводимым многообразием с неприводимыми равноразмерными слоями.
- 12) Группы Пикара аффинного факториального многообразия и грассманиана.
- 13) Тривиальность векторных расслоений над аффинной прямой. Теорема Биркгофа-Гротендика о расщепимости векторного расслоения на проективной прямой.
- 14) Связь между дивизорами Вейля, дивизорами Картье и обратимыми пучками. Теорема о вырезании.
- 15) Рациональное отображение в проективное пространство, задаваемое линейной системой дивизоров.

- 16) Свойства гладких многообразий: локальная факториальность и Коэн-маколеевость, подмногообразие коразмерности  $m$  в гладком многообразии гладко тогда и только тогда, когда оно задаётся  $m$  уравнениями с линейно независимыми дифференциалами.
- 17) Принцип постоянства: количество элементов в слоях этального морфизма постоянно; степень конечного доминантного морфизма многообразия  $X$  на нормальное многообразие  $Y$  не меньше числа прообразов произвольной точки; если  $Y$  гладкое, то морфизм локально свободен тогда и только тогда, когда  $X$  коэн-маколеево.
- 18) Когомологии Чеха обратимых пучков на проективном пространстве.
- 19) Двойственность Серра и теорема Римана-Роха на гладкой кривой.
- 20) Кривая рода  $g$  вкладывается в трёхмерное проективное пространство как кривая степени  $> g+2$
- 21) Формула Гурвица.
- 22) Групповая структура на эллиптической кривой. Пространство модулей эллиптических кривых.

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Индекс пересечения и теорема Безу для плоских проективных кривых.
2. Группы Пикара аффинного факториального многообразия и грассманиана.

Билет 2:

1. Формула Гурвица.
2. Связь между дивизорами Вейля, дивизорами Картье и обратимыми пучками. Теорема о вырезании.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.